GRUE TELESCOPIQUE DE PRISE DE VUE CINEMA

Partie A. Position du contrepoids et sa mise en mouvement:

1°- Déterminer l'expression de la masse m_6 en fonction des données et faire l'application numérique.

Formule du centre d'inertie : $\sum_{i=1}^{6} m_i\overrightarrow{OG_i} = (\sum_{i=1}^{6} m_i)\,\overrightarrow{OG_S}$

$$\Rightarrow\ m_6\overrightarrow{OG_6} + m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2} + m_3\overrightarrow{OG_3} + m_4\overrightarrow{OG_4} + m_5\overrightarrow{OG_5} = m_S\overrightarrow{OG_S}$$

Tous les vecteurs sont portés par $\vec{x}$; donc

$$m_6x_6 + m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5 = (m_6 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5)x_S$$

G_1 coïncide avec O donc x_1=0.

On veut que G_S coïncide avec O donc x_S=0.

$$m_6x_6 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5 = 0$$

En position sortie du télescope x_6 est connue (x_6 = - 2 m), donc

$$\boxed{m_6 = \frac{-(m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5)}{x_6} = \mathbf{922,4\ kg}}$$

2°- En position du télescope rentré, déterminer l'expression de l'inconnue x_6 en fonction des données et faire l'application numérique en prenant m_6 = 923 kg.

A partir des mêmes relations de la question 1 on obtient :

$$\boxed{x_6 = \frac{-(m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5)}{m_6} = \mathbf{-0,334\ m}}$$

3°- Sachant que le câble ne glisse pas sur la poulie (10), déterminer l'expression de la vitesse de translation de (6) par rapport à (T1) en fonction de ω_m et des données, elle sera notée V_6.

$V_6 = R_{10}\,\omega_{10}$, avec (puisque (10), (0) et (8) forment la même pièce) : $\dfrac{\omega_{10}}{\omega_m} = \dfrac{\omega_9}{\omega_m} = \dfrac{\omega_8}{\omega_m} = \dfrac{Z_7}{Z_8}$

Donc

$$\boxed{V_6 = R_{10}\,\omega_m\,\frac{Z_7}{Z_8}}$$

4°- Sachant que le câble ne glisse pas sur la poulie (9), déterminer l'expression de la vitesse de translation de (T2) par rapport à (T1) en fonction de $\boldsymbol{\omega_m}$ et des données, elle sera notée V_2.

$$V_2 = R_9\,\omega_9$$

Donc

$$\boxed{V_2 = R_9\,\omega_m\,\frac{Z_7}{Z_8}}$$

5°- Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble (E)= (6, T2, T3, T4, 5) par rapport à (T1) en fonction des masses m_i citées dans le tableau ci-dessus <u>(page 3/10)</u> et des vitesses V_i.

$$\boxed{E_c(E/_{T1}) = \frac{1}{2}(m_6V_6^2 + m_2V_2^2 + m_3V_3^2 + m_4V_4^2 + m_5V_5^2)}$$

6°- Donner l'expression de cette énergie cinétique en fonction de $\boldsymbol{\omega_m}$.

On a d'après les questions 3 et 4 :

$$\boxed{V_6 = R_{10}\,\omega_m\,\frac{Z_7}{Z_8}} \qquad \boxed{V_2 = R_9\,\omega_m\,\frac{Z_7}{Z_8}}$$

D'après l'énoncé :

$$V_2 = \frac{1}{3}V_5 \quad \Longrightarrow \quad V_5 = 3V_2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{V_5 = 3R_9\,\omega_m\,\frac{Z_7}{Z_8}}$$

$$V_3 = \frac{2}{3}V_5 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{V_3 = 2R_9\,\omega_m\,\frac{Z_7}{Z_8}}$$

Enfin d'après l'énoncé $V_4 = V_5$:

$$\boxed{\Longrightarrow V_4 = 3R_9\,\omega_m\,\frac{Z_7}{Z_8}}$$

Donc

$$\boxed{E_c(E/_{T1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_7}{Z_8}\right)^2{\omega_m}^2[m_6R_{10}^2 + (m_2 + 4m_3 + 9(m_4 + m_5)R_9^2] = \boldsymbol{\frac{1}{2}J_{\acute{e}quivalent}{\omega_m}^2}}$$

7°- En déduire le moment d'inertie équivalent $\boldsymbol{J_{\acute{e}quivalent}}$ de l'ensemble (E) ramené sur l'axe moteur. Faire l'application numérique en prenant m_6 = 923 kg.

$$\boxed{J_{\acute{e}quivalent} = \left(\frac{Z_7}{Z_8}\right)^2[m_6R_{10}^2 + (m_2 + 4m_3 + 9(m_4 + m_5)R_9^2] = \boldsymbol{1,407.10^{-2}\ kg.m^2}}$$

8°- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique (appelé aussi théorème de l'énergie puissance) au système E= (6, T2, T3, T4, 5) dans son mouvement par rapport à (T1) et en déduire C_m en fonction de ω_m et $(\frac{d}{dt}\omega_m)$.

Faire l'application numérique en prenant :

$$\left[\omega_m = 257,77\ rad/_s\right]\ et\ \left[\frac{d}{dt}\omega_m = 194,62\ rad/_{s^2}\right].$$

Théorème de l'énergie cinétique : $\frac{d}{dt}E_c(E/_{T1}) = C_m\omega_m - (\mu\omega_m)\omega_m$

$$\Rightarrow J_{\acute{e}quivalent}\,\omega_m\frac{d}{dt}\omega_m = C_m\omega_m - (\mu\omega_m)\omega_m$$

$$\boxed{\Rightarrow\quad C_m = J_{\acute{e}quivalent}(\frac{d}{dt}\omega_m) + \mu\omega_m \quad = \quad \mathbf{2,842\ mN}}$$

Partie B. <u>Effort exercé par le machiniste pour changer la position du télescope</u> :

9°- Appliquer le principe fondamental de la dynamique à (W) par rapport à (0) et déterminer les expressions des efforts Fy et Fz en fonction des données et des paramètres et leurs dérivées.

$$\begin{Bmatrix} F_z\vec{z} + F_y\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_K + \begin{Bmatrix} -m_W g\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_W} + \begin{Bmatrix} X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ M_x\vec{x} \end{Bmatrix}_{G_W} = \begin{Bmatrix} m_W\vec{\gamma}_{(G_W/R_0)} \\ \vec{\delta}_{G_W}(W/R_0) \end{Bmatrix}_{G_W} \qquad avec \qquad \vec{\gamma}_{(G_W/R_0)} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{G_W} = \vec{M}_K + \overrightarrow{G_W K}\wedge\left(F_z\vec{z} + F_y\vec{y}\right) = (-h\vec{x})\wedge\left(F_z\vec{z} + F_y\vec{y}\right) = hF_z\vec{y} - hF_y\vec{z}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_z\vec{z} + F_y\vec{y} \\ hF_z\vec{y} - hF_y\vec{z} \end{Bmatrix}_{G_W} + \begin{Bmatrix} -m_W g\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_W} + \begin{Bmatrix} X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ M_x\vec{x} \end{Bmatrix}_{G_W} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{\delta}_{G_W}(W/R_0) \end{Bmatrix}_{G_W}$$

$$Moment\ cin\acute{e}tique\ de\ {}^W/_{R_0}:\quad \vec{\sigma}_{G_W}\left({}^W/_{R_0}\right) = \bar{\bar{I}}_{G_W}(W).\vec{\Omega}\left({}^W/_{R_0}\right) = \bar{\bar{I}}_{G_W}(W).(\dot{\theta}\overrightarrow{y_0} + \dot{\varphi}\vec{z})$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_{G_W}\left({}^W/_{R_0}\right) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} . \begin{pmatrix} \dot{\theta}sin\varphi \\ \dot{\theta}cos\varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = B\dot{\theta}cos\varphi\vec{y} + B\dot{\varphi}\vec{z}}$$

$$Moment\ dynamique\ de\ {}^W/_{R_0}\ :\ \vec{\delta}_{G_W}\left(\frac{W}{R_0}\right) = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{G_W}\left({}^W/_{R_0}\right)\right)_{R0}$$

$$\vec{y}.TMD \Rightarrow hF_z = \vec{y}.\vec{\delta}_{G_W}\left({}^W/_{R_0}\right) = \vec{y}.\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{G_W}\left({}^W/_{R_0}\right)\right] = \frac{d}{dt}(\vec{y}.\vec{\sigma}_{G_W}\left({}^W/_{R_0}\right)) - \vec{\sigma}_{G_W}\left({}^W/_{R_0}\right).\left(\frac{d}{dt}\vec{y}\right)_{R0}$$

$$\vec{z}.TMD \Rightarrow -hF_y = \vec{z}.\vec{\delta}_{G_W}\left({}^W/_{R_0}\right) = \vec{z}.\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{G_W}\left({}^W/_{R_0}\right)\right] = \frac{d}{dt}(\vec{z}.\vec{\sigma}_{G_W}\left({}^W/_{R_0}\right)) - \vec{\sigma}_{G_W}\left({}^W/_{R_0}\right).\left(\frac{d}{dt}\vec{z}\right)_{R0}$$

$$Avec\ \boxed{\left(\frac{d}{dt}\vec{y}\right)_{R0} = \dot{\theta}sin\varphi\vec{z} - \dot{\varphi}\vec{x}} \qquad et \qquad \boxed{\left(\frac{d}{dt}\vec{z}\right)_{R0} = \dot{\theta}\vec{u}}$$

$\vec{y}.TMD \quad \Longrightarrow \quad hF_z = B\ddot{\theta}cos\varphi - B\dot{\theta}\dot{\varphi}sin\varphi - B\dot{\theta}\dot{\varphi}sin\varphi \quad = \quad B\left(\ddot{\theta}cos\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}sin\varphi\right)$

$\vec{z}.TMD \quad \Longrightarrow \quad -hF_y = B\ddot{\varphi} + B\dot{\theta}^2 sin\varphi cos\varphi \quad = \quad B\left(\ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 sin\varphi cos\varphi\right)$

$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{hF_z = B\left(\ddot{\theta}cos\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}sin\varphi\right)} \\ \boldsymbol{-hF_y = B\left(\ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 sin\varphi cos\varphi\right)} \end{array}}$$

10°- Calculer l'effort qu'exerce le machiniste : $\|\vec{F}_{Machiniste}\|$ dans les deux cas suivants :

- **Début d'accélération :**

$$\boldsymbol{\theta = \varphi = 0}$$
$$\boldsymbol{\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0}$$
$$\boldsymbol{\ddot{\theta} = 0,0157\ rd/s^2}$$
$$\boldsymbol{\ddot{\varphi} = 0,0078\ rd/s^2}$$

$F_z = \frac{B}{h}\ddot{\theta} = 196,9\ N \qquad et \qquad F_y = -\frac{B}{h}\ddot{\varphi} = -97,8\ N \quad d'où \ \boxed{F_{machiniste} = \sqrt{{F_y}^2 + {F_z}^2} = 219,8\ N}$

- **Début de décélération :**

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$$
$$\boldsymbol{\varphi = \pi/4}$$
$$\boldsymbol{\dot{\theta} = 0,078\ rd/s}$$
$$\boldsymbol{\dot{\varphi} = 0,0392\ rd/s}$$
$$\boldsymbol{\ddot{\theta} = -0,0157\ rd/s^2}$$
$$\boldsymbol{\ddot{\varphi} = -0,0078\ rd/s^2}$$

$F_z = \dfrac{B}{h}\left(\ddot{\theta}cos(\frac{\pi}{4}) - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}sin(\frac{\pi}{4})\right) = -193,5\ N \qquad et \qquad F_y = \dfrac{-B}{h}\left(\ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 sin(\frac{\pi}{4})cos(\frac{\pi}{4})\right) = 59,69\ N$

$$d'où \ \boxed{F_{machiniste} = \sqrt{{F_y}^2 + {F_z}^2} = 202,49\ N}$$

Partie C. <u>Déformation du télescope de la grue</u> :

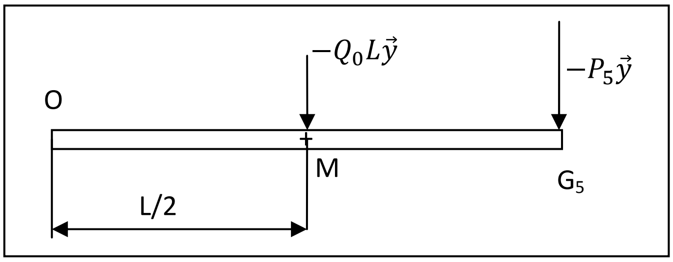
11°- Déterminer le torseur de l'action du bâti sur la poutre en O : $\{\boldsymbol{bâti \rightarrow poutre}\}_{\boldsymbol{O}}$.

Equilibre de la poutre : $\{Bâti \longrightarrow Poutre\}_O + \begin{Bmatrix} -Q_0 L\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} -P_5\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_5} = \{\vec{0}\}$

$Avec: \ \vec{M}_O = \overrightarrow{OM} \wedge (-Q_0 L\vec{y})$

$\vec{M}_O = \left(\frac{L}{2}\right)\vec{x} \wedge (-Q_0 L\vec{y})$

$\vec{M}_O = -Q_0 \frac{L^2}{2}\vec{z}$

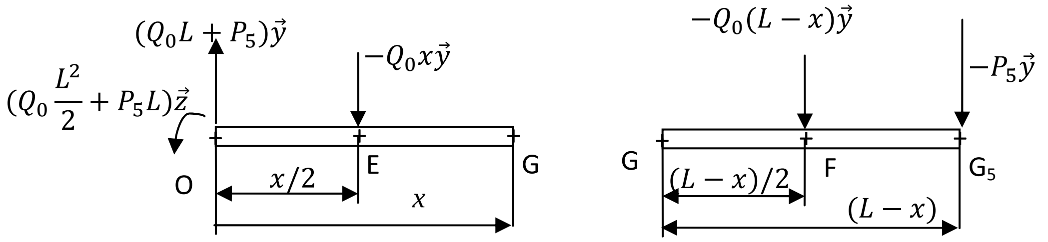


$et \ : \ \vec{M}_O = \overrightarrow{OG_5} \wedge (-P_5\vec{y}) = -P_5 L\vec{z}$

$$\boxed{Donc \qquad \{Bâti \longrightarrow Poutre\}_O = \begin{Bmatrix} (Q_0 L + P_5)\vec{y} \\ (Q_0 \frac{L^2}{2} + P_5 L)\vec{z} \end{Bmatrix}_O}$$

12°-

Coupure de la poutre à une distance (x) de O :



Torseur de cohésion :

$$\{\tau_{coh}\}_G = +\begin{Bmatrix} -Q_0(L-x)\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_F + \begin{Bmatrix} -P_5\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_5}$$

$$\vec{M}_G = \overrightarrow{GF} \wedge (-Q_0(L-x)\vec{y}$$

$$\vec{M}_G = \left(\frac{L-x}{2}\right)\vec{x} \wedge (-Q_0(L-x)\vec{y}$$

$$\vec{M}_G = -Q_0\frac{(L-x)^2}{2}\vec{z}$$

$$\vec{M}_G = \overrightarrow{GG_5} \wedge (-P_5)\vec{y}$$

$$\vec{M}_G = (L-x)\vec{x} \wedge (-P_5)\vec{y}$$

$$\vec{M}_G = -P_5(L-x)\vec{z}$$

$$Donc \quad : \quad \{\tau_{coh}\}_G = +\begin{Bmatrix} (-Q_0(L-x) - P_5)\vec{y} \\ (-Q_0\frac{(L-x)^2}{2} - P_5(L-x))\vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N = 0 & M_t = 0 \\ T_y = -Q_0(L-x) - P_5 & M_{fy} = 0 \\ T_z = 0 & M_{fz} = -Q_0\dfrac{(L-x)^2}{2} - P_5(L-x) \end{Bmatrix}_G$$

13°- Déterminer le moment quadratique I_{Gz} de la section par rapport à l'axe $(G, \vec{z})$.

Faire l'application numérique sachant que : b = 380 mm e = 25 mm
a = 260 mm D = 50 mm.

$$I_{Gz} = I_{Gz}(de\ la\ section\ si\ elle\ était\ pleine) - I_{Gz}(de\ la\ partie\ creuse\ de\ la\ section)$$

$$Donc: \quad I_{Gz} = \frac{ab^3}{12} - \frac{(a-2e)(b-2D)^3}{12}$$

$$Donc \quad : \quad I_{Gz} = 8{,}047.10^8\ mm^4$$

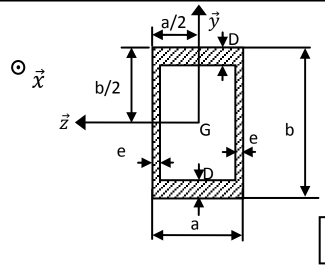


Figure 8

14°- **L'expression de la déformée de la poutre est :**

$$\boldsymbol{Y(x) = \frac{1}{EI_{Gz}}\left\{\frac{Q_0}{24}[L^4-(L-x)^4]+\frac{P_5}{6}[L^3-(L-x)^3]-\left[\frac{Q_0L^3}{6}+\frac{P_5L^2}{2}\right]x\right\}}.$$

Déterminer l'expression et la valeur numérique de la flèche de la poutre en G_5 :
Y(x=L) sachant que : E = 70000 Mpa

on prendra $I_{Gz} = 8.10^8\ mm^4$

Q_0 = 181 N/m

m_5 = 100 kg

g = 9,81 m/s² accélération de pesanteur.

$$Y(x=L) = \frac{1}{EI_{Gz}}\left\{\frac{Q_0L^4}{24}+\frac{P_5L^3}{6}-\frac{Q_0L^4}{6}-\frac{P_5L^3}{2}\right\}$$

$$Y(x=L) = \frac{1}{EI_{Gz}}\left\{\frac{-Q_0L^4}{8}-\frac{P_5L^3}{3}\right\}$$

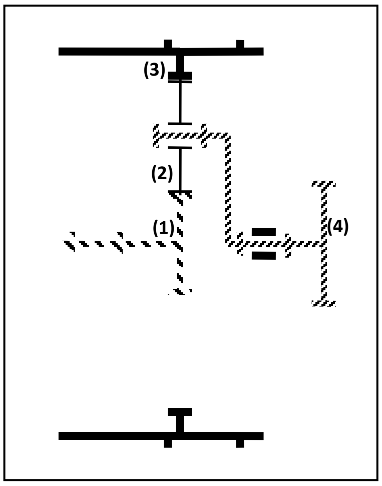
$$\boxed{Y(x=L) = \frac{-L^3}{EI_{Gz}}\left\{\frac{Q_0L}{8}+\frac{P_5}{3}\right\}}$$

$$\boxed{Y(x=L) = -9{,}063\ mm}$$

Partie D. <u>Roue motrice du chariot</u> :

15°- **A l'aide de la formule de WILLIS déterminer la relation entre les vitesses angulaires ω_4 et ω_1.**

On isole le train épicycloïdal et on libère toutes les roues :



Formule de WILLIS :

$$\frac{\omega_3-\omega_4}{\omega_1-\omega_4} = (-1)^1\frac{Z_1}{Z_2}.\frac{Z_2}{Z_3}$$

$$puis\ on\ le\ remet\ dans\ le\ montage\ \Rightarrow \omega_3 = 0$$

donc : $$\frac{0-\omega_4}{\omega_1-\omega_4} = (-1)^1\frac{Z_1}{Z_2}.\frac{Z_2}{Z_3}$$

$$\boxed{donc\ :\ \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_1+Z_3}}$$

16°- Déterminer la relation entre les vitesses angulaires ω_6 et ω_4.

(4), (5) et (6) forment un train ordinaire, donc :

$$\boxed{\frac{\omega_6}{\omega_4} = (-1)^1 \frac{Z_4}{Z_5}.\frac{Z_5}{Z_6} = -\frac{Z_4}{Z_6}}$$

17°- En déduire la relation entre les vitesses angulaires ω_6 et ω_1. Calculer $|\omega_6|$ sachant que $\omega_1 = 105\, rad/s$.

$$\boxed{\frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{\omega_6}{\omega_4}.\frac{\omega_4}{\omega_1} = \left(-\frac{Z_4}{Z_6}\right).\left(\frac{Z_1}{Z_{1+}Z_3}\right)}$$

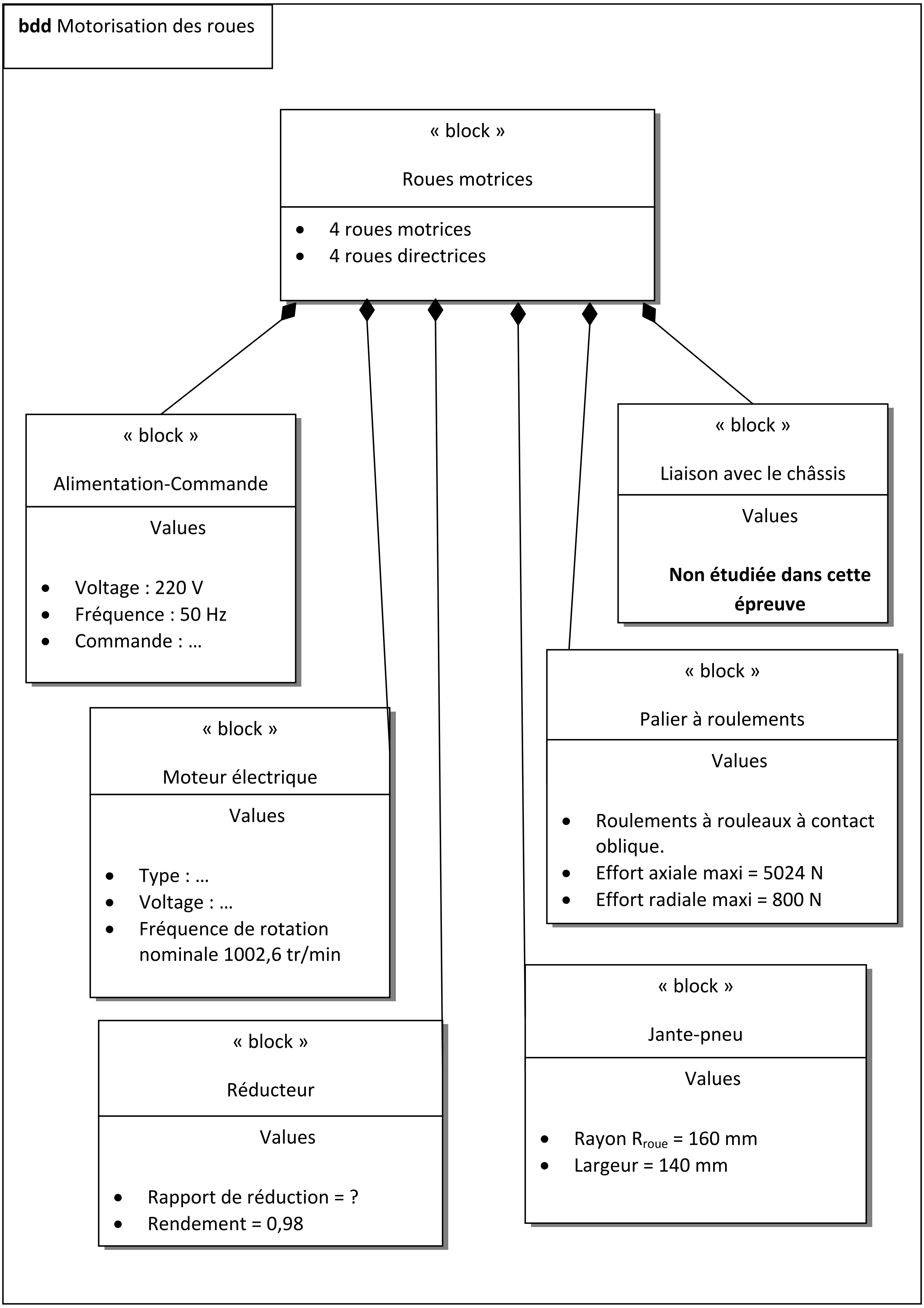
Donc :

$$|\omega_6| = 7{,}858\, rd/s$$

18°- En déduire la vitesse d'avance du chariot en (km/h) si le rayon de la roue est R_{roue} = 160 mm et que les quatre roues roulent en ligne droite sans glisser sur le sol.

$$V = R_{roue}.\omega_6 = 1{,}257\, {}^{m}/_{s} = 4{,}526\, km/h$$

19°- En se basant sur les données de cette partie D et le document 4/4, compléter le diagramme de définition de blocs sur le <u>document à rendre 1/1</u>.


bdd Motorisation des roues
« block »
Roues motrices
4 roues motrices
4 roues directrices
« block »
Alimentation-Commande
Values
Voltage : 220 V
Fréquence : 50 Hz
Commande : …
« block »
Liaison avec le châssis
Values
Non étudiée dans cette épreuve
« block »
Palier à roulements
Values
Roulements à rouleaux à contact oblique.
Effort axiale maxi = 5024 N
Effort radiale maxi = 800 N
« block »
Moteur électrique
Values
Type : …
Voltage : …
Fréquence de rotation nominale 1002,6 tr/min
« block »
Jante-pneu
Values
Rayon R_{roue} = 160 mm
Largeur = 140 mm
« block »
Réducteur
Values
Rapport de réduction = ?
Rendement = 0,98